Prof. Dr. Hj. Rahayu Kariadinata, M.Pd.

TRIGONOMETRI DASAR

EDISI REVISI

Pustaka Setia

Rahayu K

Prof. Dr. Hj. Rahayu Kariadinata, M.Pd. Bdg, Mar '19

TRIGONOMETRI DASAR

EDISI REVISI

Penerbit PUSTAKA SETIA Bandung

Kariadinata, Rahayu, Prof. Dr., Hj., M.Pd.

TRIGONOMETRI DASAR/Prof. Dr. Hj. Rahayu Kariadinata, M.Pd.
-- Cet. Ke III Ed. Rev. -- Bandung: Pustaka Setia, September 2018
xx + 332 hlm.; 15,5 × 23 cm.

ISBN 978–979–076–330–2

Desain Cover	:	**Tim Redaksi Pustaka Setia**
Setting, Layout, Montase	:	**Tim Redaksi Pustaka Setia**
Cetakan Ke III Edisi Revisi	**:**	**September 2018**
Diterbitkan oleh	:	**CV PUSTAKA SETIA** Jl. BKR (Lingkar Selatan) No. 162–164 Telp. : (022) 5210588 Faks. : (022) 5224105 E-mail: pustaka_seti@yahoo.com Website: www.pustakasetia.com **BANDUNG 40253**

(Anggota IKAPI Cabang Jawa Barat)

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT., yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan buku berjudul ***Trigonometri Dasar Edisi Revisi*** sebagai penunjang perkuliahan Trigonometri.

Mata kuliah Trigonometri merupakan prasyarat bagi mahasiswa dalam mengikuti perkuliahan lanjutan, seperti Kalkulus, Kapita Selekta Matematika, dan sebagainya. Trigonometri adalah salah satu cabang dari ilmu matematika geometri. Sebagian besar siswa kurang menyukai materi trigonometri karena dianggap sulit, banyak rumus, dan memiliki soal-soal yang sangat variatif dan rumit. Oleh karena itu, guru matematika dituntut untuk memiliki kemampuan, baik dari segi materi maupun strategi dalam menyampaikan konsep, sehingga siswa memiliki kemampuan pemahaman yang memadai. Melalui buku ini diharapkan mahasiswa calon guru matematika memiliki kemampuan memahami konsep trigonometri.

Dalam menyusun buku ini, penulis mendapat dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

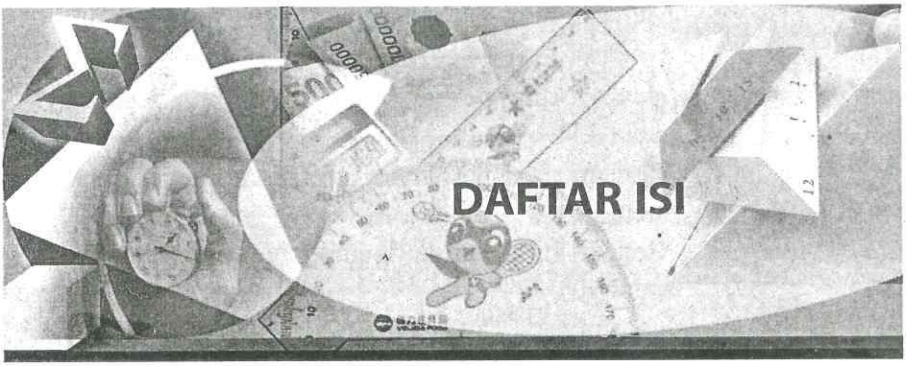
1. Dekan Fakultas Tarbiyah dan Keguruan, Universitas Islam Negeri (UIN) Sunan Gunung Djati Bandung;
2. Ketua Jurusan Pendidikan MIPA, Ketua Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Tarbiyah dan Keguruan, Universitas Islam Negeri (UIN) Sunan Gunung Djati Bandung;
3. Rekan-rekan sesama dosen Program Studi Pendidikan Matematika.

Semuanya telah memberikan bantuan, dukungan, dan motivasi kepada penulis dalam proses penyusunan buku ini. Semoga Allah SWT. membalasnya dengan pahala yang berlipat ganda. Amin.

Penulis menyadari bahwa buku ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, saran dan kritik demi penyempurnaan buku ini selalu penulis harapkan. Akhir kata, semoga buku ini dapat bermanfaat.

Bandung, September 2018

Penulis



DAFTAR ISI

SEKILAS TENTANG SEJARAH TRIGONOMETRI

Berbicara tentang trigonometri tidak terlepas dari konsep segitiga. Kata *trigonometri* berasal dari bahasa Yunani, yaitu *trigono* artinya "tiga sudut" dan *metro* artinya "mengukur". Jadi, *trigonometri* adalah sebuah cabang matematika yang berhadapan dengan sudut segitiga dan fungsi trigonometrik, seperti sinus, kosinus, dan tangen.

Awal trigonometri dapat dilacak hingga zaman Mesir Kuno, Babilonia, dan peradaban Lembah Indus, lebih dari 3000 tahun yang lalu. Matematikawan India adalah perintis penghitungan variabel aljabar yang digunakan untuk menghitung astronomi dan juga trigonometri.

Matematika dan Kejayaan Islam

Masa kejayaan Islam tempo dulu, antara lain ditandai dengan maraknya tradisi ilmu pengetahuan. Para sarjana muslim, khususnya yang berada di Baghdad dan Andalusia, memainkan peran cukup penting bagi tumbuh dan berkembangnya ilmu kedokteran, matematika, kimia, dan bidang ilmu lain yang ada sekarang. Selama berabad-abad sarjana-sarjana muslim menuangkan buah pikiran dan hasil penelitiannya ke dalam kitab-kitab pengetahuan untuk kemudian menjadi rujukan ilmu pengetahuan modern. Kini, dunia telah dapat mengambil manfaat dari pengembangan ilmu yang dirintis oleh para ilmuwan serta sarjana muslim tersebut.

Abul Wafa Muhammad Ibn Muhammad Ibn Yahya Ibn Ismail Al-Buzjani adalah satu di antara sekian banyak ilmuwan muslim yang turut mewarnai khazanah pengetahuan masa lalu. Dia tercatat sebagai seorang ahli di bidang ilmu matematika dan astronomi. Kota kecil bernama Buzjan, Nishapur adalah tempat kelahiran ilmuwan besar ini, tepatnya pada tahun 940 M. Sejak masih kecil, kecerdasannya sudah mulai tampak dan hal tersebut ditunjang dengan minatnya yang besar di bidang ilmu alam. Masa sekolahnya dihabiskan di kota kelahirannya.

Setelah berhasil menyelesaikan pendidikan dasar dan menengah, Abul Wafa lantas memutuskan untuk meneruskan ke jenjang lebih tinggi di ibukota Baghdad tahun 959 M. Di sana, dia pun belajar ilmu matematika. Sejarah mencatat, di kota inilah Abul Wafa kemudian menghabiskan masa hidupnya. Tradisi dan iklim keilmuan Baghdad benar-benar sangat kondusif bagi perkembangan pemikiran Abul Wafa. Berkat bimbingan sejumlah ilmuwan terkemuka pada masa itu, tidak berapa lama dia pun menjelma menjadi seorang pemuda yang memiliki otak cemerlang.

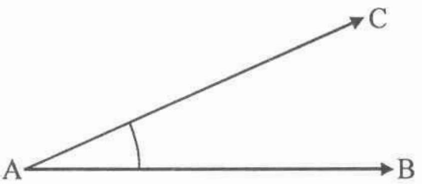
Dia pun lantas banyak membantu para ilmuwan serta secara pribadi mengembangkan beberapa teori penting di bidang matematika, terutama geometri dan trigonometri. Di bidang ilmu geometri, Abul Wafa memberikan kontribusi signifikan bagi pemecahan soal-soal geometri dengan menggunakan kompas; konstruksi ekuivalen untuk semua bidang, polyhedral umum; konstruksi hexagon setengah sisi dari segitiga sama kaki; konstruksi parabola dari titik dan solusi geometri bagi persamaan. Konstruksi bangunan trigonometri versi Abul Wafa hingga kini diakui sangat besar kemanfaatannya. Dia adalah yang pertama menunjukkan adanya teori relatif segitiga parabola. Tidak hanya itu, dia juga mengembangkan metode baru tentang konstruksi segiempat serta perbaikan nilai sinus 30 dengan memakai delapan desimal. Abul Wafa pun mengembangkan hubungan sinus dan formula:

$$\boxed{2 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \cos \alpha \text{ dan juga } \sin \alpha = 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos}$$

Di samping itu, Abul Wafa membuat studi khusus menyangkut teori tangen dan tabel penghitungan tangen. Dia memperkenalkan secan dan cosecan untuk pertama kalinya, berhasil mengetahui relasi antara garis-garis trigonometri yang berguna untuk memetakannya, serta meletakkan dasar bagi keberlanjutan studi teori *conic*. Abul Wafa bukan hanya ahli matematika, namun juga piawai dalam bidang ilmu astronomi. Beberapa tahun dihabiskannya untuk mempelajari perbedaan pergerakan bulan dan

Bab 1 UKURAN SUDUT

Sudut dapat dibentuk oleh dua buah sinar garis yang memiliki titik pangkal yang sama (berimpit). Perhatikan gambar 1.1 berikut.

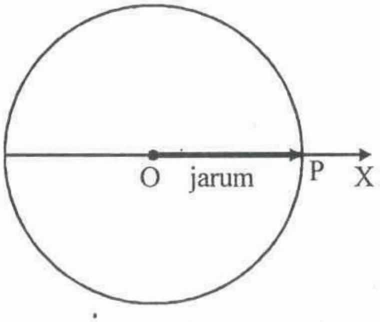


Gambar 1.1

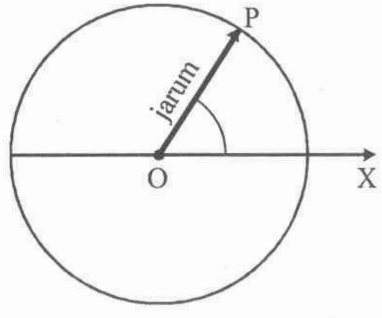
Sudut A tersebut dibentuk oleh sinar AB dan AC dengan titik pangkal A. Dalam trigonometri, ada dua macam ukuran sudut yang sering digunakan, yaitu *ukuran sudut dalam derajat* dan *ukuran sudut dalam radian.*

A. Ukuran Sudut dalam Derajat

Besar suatu sudut dalam ukuran derajat dapat dijelaskan dengan menggunakan konsep sudut sebagai jarak putar. Perhatikan gambar-gambar berikut ini.

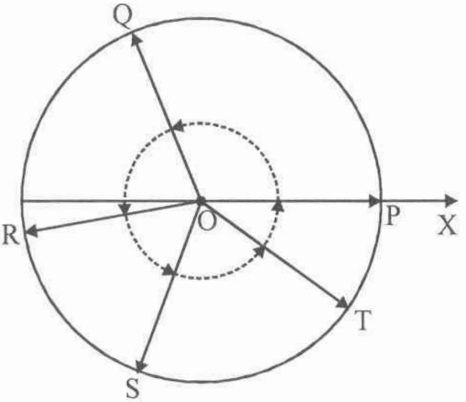


Gambar 1.2



Gambar 1.3

Perhatikan gambar 1.2, misalnya titik ujung jarum mula-mula berada di titik P. Titik P terdapat pada garis OX, sehingga sudut yang dibentuk oleh jarum terhadap OX sama dengan nol derajat (0^o). Selanjutnya, jarum diputar berlawanan arah jarum jam sehingga diperoleh hasil seperti yang ditunjukkan pada gambar 1.3. Sudut antara jarum dengan garis OX merupakan *jarak putar*. Jika jarak putarnya diperbesar, sudut tersebut akan semakin besar. Gerak jarum dalam gambar di atas dapat dilukiskan oleh gerak dari jari-jari lingkaran, seperti diperlihatkan pada gambar 1.4.



Gambar 1.4

Ukuran besar sudut ditentukan oleh jarak putar jari-jari lingkaran terhadap garis OX. Sekarang, jika jarum digerakkan sehingga ujungnya yang semula di P berpindah ke Q, kemudian ke R, kemudian ke S, kemudian ke T, dan kembali lagi ke P, dikatakan jarum ini bergerak *satu putaran*. Panjang lintasan yang ditelusuri oleh titik ujung jarum sama dengan *keliling lingkaran* dan besar sudut yang disapu oleh jarum sama dengan *360^o*.

Definisi

Satu derajat (1^o) didefinisikan sebagai ukuran besar sudut yang disapu oleh jari-jari lingkaran dalam jarak putar sejauh $\frac{1}{360}$ putaran atau dapat ditulis sebagai $1^o = \frac{1}{360}$ putaran.

Berdasarkan definisi tersebut, jelas bahwa 1 putaran = 360^o dan untuk sudut-sudut yang kurang dari satu putaran dapat ditentukan besar sudutnya jika diketahui seperberapa jarak putarannya terhadap satu kali putaran penuh.

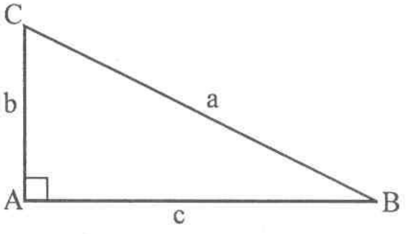
Sebagai contoh:

Setengah putaran = $\frac{1}{2} \times 360^o = 180^o$ disebut *sudut lurus*

Bab 2 PERBANDINGAN TRIGONOMETRI

A. Pengertian

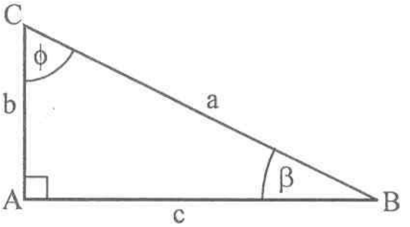
Istilah perbandingan trigonometri dapat diartikan sebagai perbandingan panjang sisi-sisi pada segitiga siku-siku. Pada bahasan ini, kita akan lebih banyak membicarakan tentang segitiga siku-siku, terutama unsur-unsur pada segitiga siku-siku yang berkaitan langsung dengan perbandingan trigonometri. Untuk lebih mengenal tentang konsep segitiga siku-siku, perhatikan gambar berikut ini.



Gambar 2.1 Segitiga siku-siku ABC dalam posisi standar

Sudut A merupakan sudut siku-siku yang besarnya 90°, sisi BC atau sisi a merupakan sisi yang berada di hadapan sudut A, atau biasa disebut *sisi miring (hipotenusa)*. Sisi AC atau sisi b merupakan sisi yang berada di hadapan sudut B. Sisi AB atau sisi c merupakan sisi yang berada di hadapan sudut C.

Selanjutnya, perhatikan gambar 2.2 berikut.



Gambar 2.2

Terhadap sudut B (β):

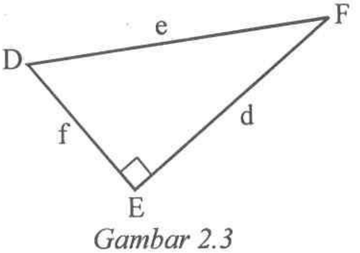
Sisi a dinamakan *sisi miring (hipotenusa)*.

Sisi b dinamakan *sisi di hadapan sudut B (β)*.

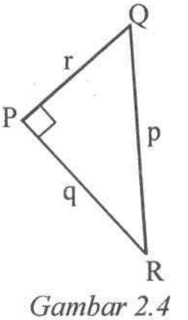
Sisi c dinamakan *sisi di dekat sudut B (β)*.

Terhadap sudut C (ϕ):
Sisi a dinamakan *sisi miring (hipotenusa).*
Sisi b dinamakan *sisi di dekat sudut C (ϕ).*
Sisi c dinamakan *sisi di hadapan sudut C (ϕ).*

Selanjutnya, perhatikan gambar 2.3 dan gambar 2.4 berikut.



Gambar 2.3



Gambar 2.4

Segitiga siku-siku DEF dan segitiga siku-siku PQR dalam posisi tidak standar

Letak segitiga siku-siku DEF dan segitiga siku-siku PQR ada dalam posisi tidak standar. Dengan mengacu pada uraian di atas, kita dapat mengatakan bahwa:

Pada gambar 2.3:

Terhadap sudut D:
Sisi d dinamakan *sisi di hadapan sudut D.*
Sisi e dinamakan *sisi miring (hipotenusa).*
Sisi f dinamakan *sisi di dekat sudut D.*

Terhadap sudut F:
Sisi d dinamakan *sisi di dekat sudut F.*
Sisi e dinamakan *sisi miring (hipotenusa).*
Sisi f dinamakan *sisi di hadapan sudut F.*

Pada gambar 2.4:

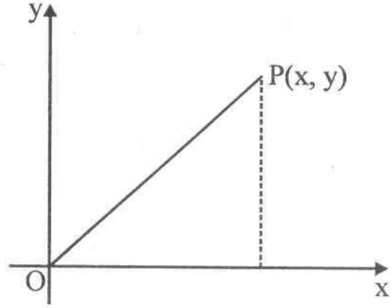
Terhadap sudut Q:
Sisi p dinamakan *sisi miring (hipotenusa).*
Sisi q dinamakan *sisi di hadapan sudut Q.*
Sisi r dinamakan *sisi di dekat sudut Q.*

Terhadap sudut R:
Sisi p dinamakan *sisi miring (hipotenusa).*
Sisi q dinamakan *sisi di dekat sudut R.*
Sisi r dinamakan *sisi di hadapan sudut R.*

Bab 3 KOORDINAT KUTUB (KOORDINAT POLAR)

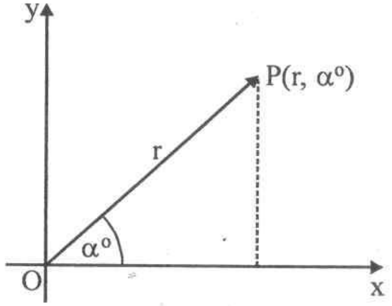
A. Pengertian Koordinat Kutub Sebuah Titik

Kita mengetahui bahwa kedudukan atau letak sebuah titik pada bidang x-y dapat disajikan dengan menggunakan *koordinat kartesius,* seperti gambar di samping.



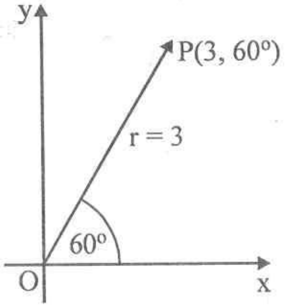
Gambar 3.1
Koordinat kartesius titik P

Titik P mempunyai absis x dan ordinat y, maka koordinat kartesius titik P adalah (x, y). Letak titik P pada bidang x-y dapat pula disajikan dengan menggunakan *koordinat kutub,* seperti gambar di samping.

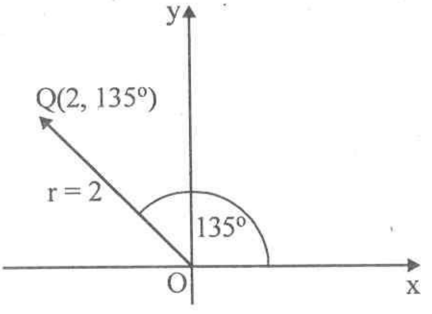


Gambar 3.2
Koordinat kutub titik P

Pada gambar 3.3a berikut ini, koordinat titik P adalah (3, 60°), sebab r = 3 dan $\alpha^o = 60^o$. Adapun pada gambar 3.3b, koordinat titik Q adalah (2, 135°), sebab r = 2 dan $\alpha^o = 135^o$.



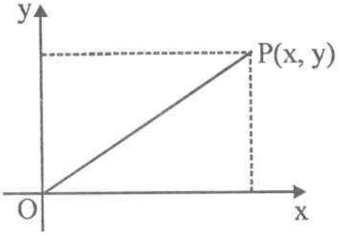
Gambar 3.3a



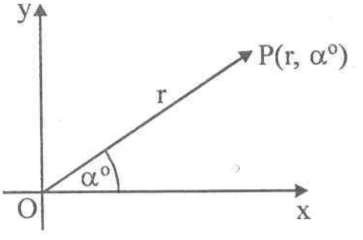
Gambar 3.3b

B. Hubungan Koordinat Kartesius dengan Koordinat Kutub

Pada gambar 3.4a berikut ini, titik P dinyatakan dengan koordinat kartesius (x, y), sedangkan pada gambar 3.4b titik P dinyatakan dalam koordinat kutub (r, α^o).



Gambar 3.4a



Gambar 3.4b

Apabila koordinat kutub titik P(r, α) diketahui, maka koordinat kartesius P(x, y) ditentukan dengan rumus:

$$\boxed{\sin \alpha^o = \frac{y}{r} \Leftrightarrow y = r \sin \alpha^o}$$

dan

$$\boxed{\cos \alpha^o = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r \cos \alpha^o}$$

Bab 4 IDENTITAS TRIGONOMETRI

Identitas trigonometri dasar terdiri atas:

1. Identitas trigonometri dasar yang merupakan *hubungan kebalikan*

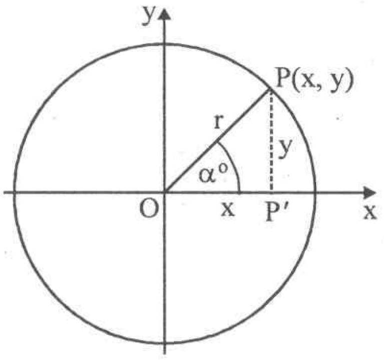
a.	$\sin a^{o} = \dfrac{1}{\text{cosec } \alpha^{o}}$ atau $\text{cosec } a^{o} = \dfrac{1}{\sin \alpha^{o}}$
b.	$\cos a^{o} = \dfrac{1}{\sec \alpha^{o}}$ atau $\sec a^{o} = \dfrac{1}{\cos \alpha^{o}}$
c.	$\tan a^{o} = \dfrac{1}{\cot \alpha^{o}}$ atau $\cot a^{o} = \dfrac{1}{\tan \alpha^{o}}$

2. Identitas trigonometri dasar yang merupakan *hubungan perbandingan*

a.	$\tan \alpha^{o} = \dfrac{\sin \alpha^{o}}{\cos \alpha^{o}}$	b.	$\cot \alpha^{o} = \dfrac{\cos \alpha^{o}}{\sin \alpha^{o}}$

3. Identitas trigonometri dasar yang diperoleh dari *hubungan Pythagoras*

Identitas-identitas trigonometri dasar yang diperoleh dari hubungan Pythagoras dapat diperoleh melalui tinjauan geometris analisis sebagai berikut.



Gambar 4.1

Pada gambar 4.1 di samping, titik P(x, y) terletak pada lingkaran satuan dengan $\angle POP' = \alpha^o$. Segitiga OPP′ merupakan segitiga siku-siku di P′, sehingga:

$$\sin \alpha^o = \frac{PP'}{OP} = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$$

atau $y = \sin \alpha^o$

$$\cos \alpha^o = \frac{OP'}{OP} = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$$

atau $x = \cos \alpha^o$

$\tan \alpha^o = \dfrac{y}{x}$; $\cot \alpha^o = \dfrac{x}{y}$; $\sec \alpha^o = \dfrac{1}{x}$; $\operatorname{cosec} \alpha^o = \dfrac{1}{y}$; dan berlaku hubungan Pythagoras:

$$(OP')^2 + (PP')^2 = (OP)^2$$
$$(x)^2 + (y)^2 = (r)^2$$
$$(x)^2 + (y)^2 = 1$$

Jika substitusikan $x = \cos \alpha^o$ dan $y = \sin \alpha^o$ ke persamaan $(x)^2 + (y)^2 = 1$, diperoleh:

$$(\cos \alpha^o)^2 + (\sin \alpha^o)^2 = (1)^2$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha^o + \sin^2\alpha^o = 1$$

atau $\sin^2\alpha^o + \cos^2\alpha^o = 1$ .... (*)

Jika kedua ruas dari persamaan $x^2 + y^2 = 1$ dibagi dengan x^2, maka diperoleh:

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$
$$\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

Jika kita substitusikan $\left(\dfrac{y}{x}\right) = \tan \alpha^o$ dan $\left(\dfrac{1}{x}\right) = \sec \alpha^o$ ke persamaan:

$1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2$ maka diperoleh:

$1 + \tan^2\alpha^o = \sec^2\alpha^o$ .... (**)

Bab 5 GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI

A. Fungsi Trigonometri Sinus, Kosinus, dan Tangen

Fungsi yang memetakan himpunan sudut x^o ke himpunan bilangan real sin x^o, cos x^o, dan tan x^o disebut *fungsi sinus, fungsi kosinus,* dan *fungsi tangen,* dilambangkan dengan:

$f: x^o \rightarrow \sin x^o$ (f memetakan x^o ke sinus x^o)

$f: x^o \rightarrow \cos x^o$ (f memetakan x^o ke kosinus x^o)

$f: x^o \rightarrow \tan x^o$ (f memetakan x^o ke tangen x^o)

Jadi, rumus untuk:

> *fungsi sinus* adalah $f(x^o) = \sin x^o$ atau $f(x) = \sin x$
> *fungsi kosinus* adalah $f(x^o) = \cos x^o$ atau $f(x) = \cos x$
> *fungsi tangen* adalah $f(x^o) = \tan x^o$ atau $f(x) = \tan x$

Fungsi-fungsi trigonometri $f(x^o) = \sin x^o$, $f(x^o) = \cos x^o$, dan $f(x^o) = \tan x^o$ mempunyai persamaan grafik berturut-turut adalah $y = \sin x^o$, $y = \cos x^o$, dan $y = \tan x^o$.

B. Menggambar Grafik Fungsi Trigonometri $y = \sin x^o$, $y = \cos x^o$, dan $y = \tan x^o$ untuk $0 < x < 360$

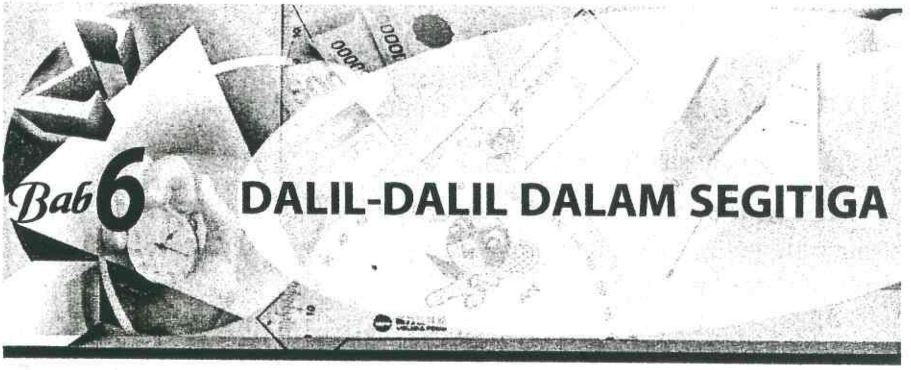
1. Dengan menggunakan tabel pasangan terurut

Menggambar grafik fungsi dengan menggunakan tabel pasangan terurut, pada prinsipnya adalah mengurutkan nilai-nilai sembarang sudut x, dengan nilai fungsinya. Untuk mempermudah, kita gunakan sudut-sudut istimewa yang sudah kita ketahui.

Kita pilih sudut-sudut: 0, 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 330, dan 360.

Kemudian dicari nilai $y = \sin x^o$, $y = \cos x^o$, dan $y = \tan x^o$. Hubungan antara x dengan $y = \sin x^o$, $y = \cos x^o$, dan $y = \tan x^o$ dibuat dalam sebuah tabel. Setelah itu, dibuat grafiknya dengan menentukan titik-titik pasangan terurut yang telah diperoleh dari tabel.

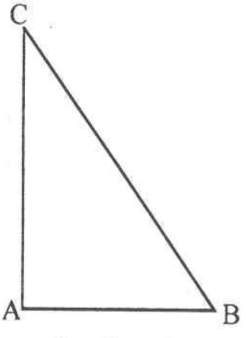
Grafik fungsi $y = \sin x^o$, $y = \cos x^o$, dan $y = \tan x^o$ untuk $0 < x < 360$, diperlihatkan pada gambar 5.1, gambar 5.2, dan gambar 5.3 berikut.



Bab 6 DALIL-DALIL DALAM SEGITIGA

Sebelumnya, kita telah mempelajari bagaimana mencari unsur-unsur dalam segitiga siku-siku, yaitu mencari sisi dan besar sudut apabila sebuah sudut dan sisinya diketahui. Melalui perbandingan trigonometri, kita dapat mencari unsur-unsur yang belum diketahui, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 6.1:



Gambar 6.1

Pada gambar di samping, segitiga ABC dengan $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, dan AC = 10 cm.
Hitunglah:

a. besar $\angle C$
b. panjang sisi AB dan BC

Jawab:

a. $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$
$= 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ)$
$= 180^\circ - 150^\circ$
$= 30^\circ$

b. Panjang sisi AB:

$\tan \angle B = \dfrac{AC}{AB}$

$\Leftrightarrow \tan 60^\circ = \dfrac{10}{AB}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3} = \dfrac{10}{AB}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\ AB = 10$

Panjang sisi BC:

$\cos \angle C = \dfrac{AC}{BC}$

$\Leftrightarrow \cos 30^\circ = \dfrac{10}{BC}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{3} = \dfrac{10}{BC}$

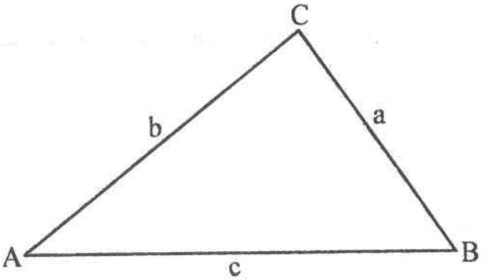
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{3}\ BC = 10$

$\Leftrightarrow \ AB = \dfrac{10}{\sqrt{3}} = \dfrac{10}{3}\sqrt{3}$ $\qquad$ $\Leftrightarrow \ BC = \dfrac{10}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \dfrac{20}{3}\sqrt{3} = 6{,}667\sqrt{3}$.

$= 3{,}33\sqrt{3}$ $\qquad$ Jadi, panjang sisi BC = $6{,}667\sqrt{3}$.

Jadi, panjang sisi AB = $3{,}33\sqrt{3}$.

Sekarang, bagaimanakah caranya apabila kita akan mencari unsur-unsur yang belum diketahui pada segitiga sebarang seperti tampak pada gambar 6.2 berikut ini.

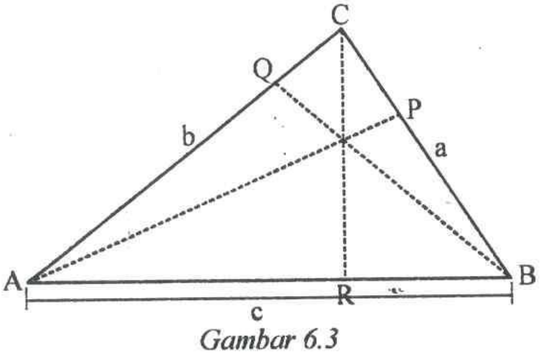


Gambar 6.2

Misalnya, diketahui besar $\angle A$, $\angle B$, dan panjang sisi b. Dapatkah kita mencari besar $\angle C$, panjang sisi a dan sisi c? Untuk besar $\angle C$ kita dapat mencarinya, namun untuk mencari panjang sisi a dan sisi c kita dapat menggunakan *aturan sinus*.

A. Aturan Sinus

Untuk menurunkan aturan sinus, perhatikan segitiga ABC lancip pada gambar 6.3 berikut ini. Garis-garis AP, BQ, dan CR merupakan garis tinggi pada sisi a, sisi b, dan sisi c.



Gambar 6.3

Pada Δ ACR:

$$\sin A = \frac{CR}{AC}$$

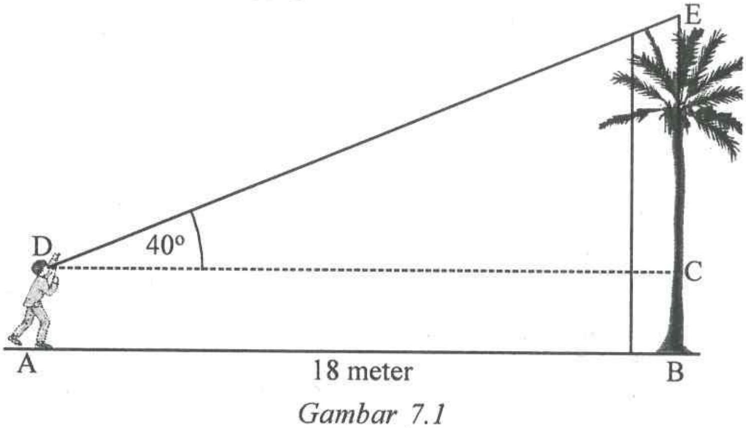
$\Leftrightarrow$ CR = AC . sin A .... (1)

Bab 7 PENERAPAN PERBANDINGAN TRIGONOMETRI DALAM KEHIDUPAN SEHARI-HARI

Dalam kehidupan sehari-hari banyak permasalahan yang dapat diselesaikan melalui perbandingan trigonometri. Misalnya, mengukur tinggi pohon atau menara, menghitung luas kebun yang berbentuk segitiga sebarang, dan sebagainya. Penyelesaian permasalahan yang berkaitan dengan perbandingan trigonometri hendaknya dipahami terlebih dahulu tentang permasalahan tersebut dan selanjutnya mengaitkan dengan konsep perbandingan trigonometri yang sesuai, misalnya penggunaan rumus sinus, rumus kosinus, luas segitiga, dan sebagainya. Berikut diberikan beberapa contoh soal penerapan perbandingan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari.

Contoh 7.1:

Ali dengan tinggi badan 1,5 meter akan mengukur tinggi pohon. Di tempat Ali berdiri, puncak pohon terlihat dengan sudut elevasi 40° dari sudut pandang mata Ali. Jarak horizontal dari Ali ke pohon sama dengan 18 meter. Berapa meterkah tinggi pohon tersebut?



Gambar 7.1

Perhatikan gambar 7.1!

Diketahui : Tinggi badan Ali = AD = CG = 1,5 meter

Besar sudut elevasi = $\angle EDC = 40^\circ$

Jarak horizontal dari Ali ke pohon = AG = CD = 18 meter

Ditanya : Tinggi pohon, yaitu panjang EG?

Jawab:

Berdasarkan gambar 7.1, diperoleh hubungan perbandingan trigonometri untuk tangen $\angle EDC$.

$$\tan \angle EDC = \frac{EC}{CD}$$

$$\Leftrightarrow \tan 40^\circ = \frac{EC}{18}$$

$$\Leftrightarrow EC = 18 \ . \ \tan 40^\circ$$

$$\Leftrightarrow EC = 18 \ . \ (0{,}839)$$

$\Leftrightarrow$ EC = 15,1 (teliti sampai 1 tempat desimal)

Tinggi pohon EG = EC + CG

= 15,1 meter + 1,5 meter

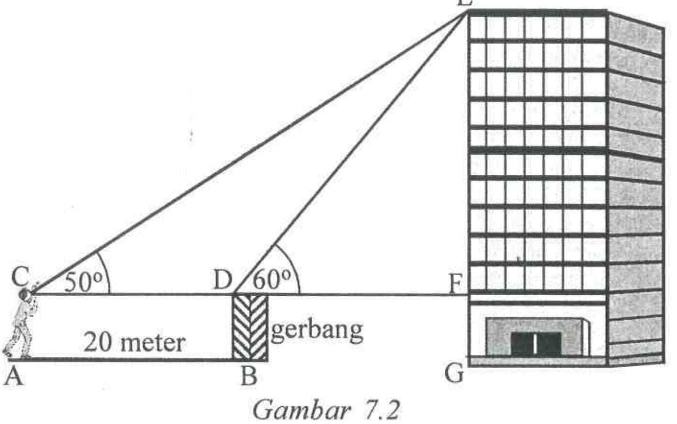
= 16,6 meter

Jadi, tinggi pohon tersebut adalah 16,6 meter.

Contoh 7.2:

Seseorang berdiri sejauh 20 meter dari pintu gerbang sebuah gedung bertingkat. Sudut elevasi gedung apabila dilihat dari puncak pintu gerbang dan tempat berdiri orang tersebut berturut-turut adalah 60° dan 50°. Jika tinggi orang tersebut sama dengan tinggi pintu gerbang = 2 meter, tentukan tinggi gedung, serta jarak orang ke gedung tersebut!

Jawab:

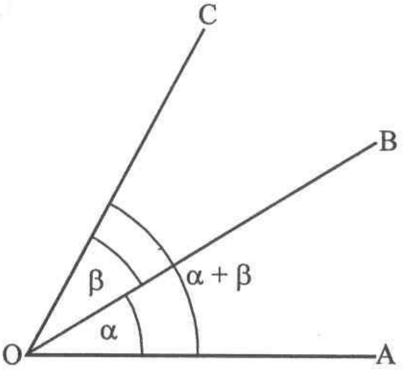


Gambar 7.2

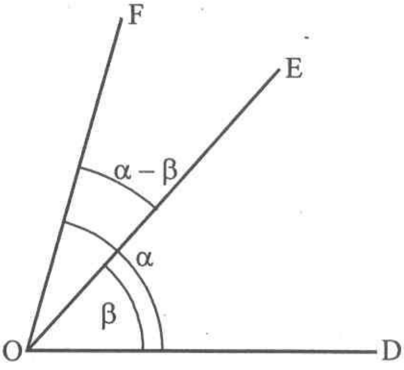
Bab 8 RUMUS-RUMUS TRIGONOMETRI

A. Rumus Trigonometri untuk Jumlah Dua Sudut dan Selisih Dua Sudut

Misalnya, α dan β adalah sudut-sudut sebarang, maka jumlah α dan β adalah $(\alpha + \beta)$ dan selisih antara a dan b adalah $(\alpha - \beta)$. Sebagai ilustrasi, perhatikan gambar 8.1 dan gambar 8.2 berikut ini.



Gambar 8.1



Gambar 8.2

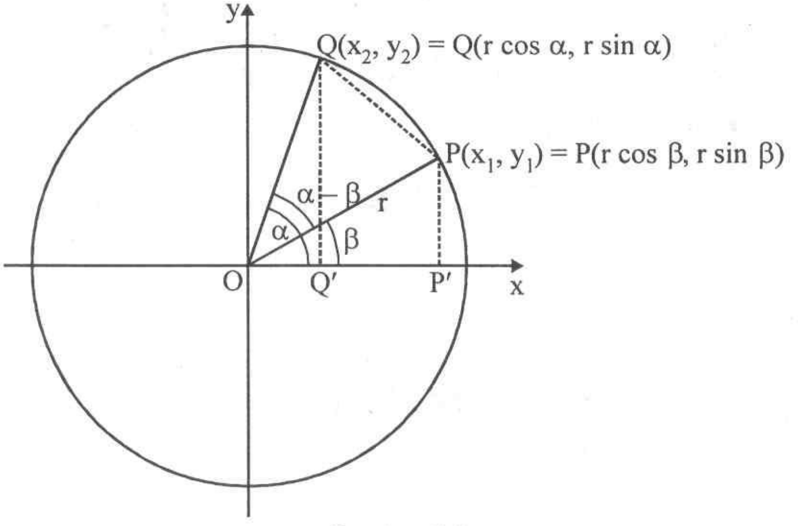
Pada gambar 8.1:
$\angle AOB = \alpha$; $\angle BOC = \beta$
$\angle AOC = \alpha + \beta$

Pada gambar 8.2:
$\angle DOF = \alpha$; $\angle DOE = \beta$
$\angle EOF = \alpha - \beta$

Selanjutnya, kita akan menurunkan rumus trigonometri untuk jumlah dua sudut dan selisih dua sudut, yaitu $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, $\tan(\alpha + \beta)$, dan $\tan(\alpha - \beta)$.

1. Rumus untuk cos (α – β) dan cos (α + β)

Untuk menurunkan rumus cos (α – β) dan cos (α + β), perhatikan gambar 8.3 dan uraian berikut ini.



Gambar 8.3

Gambar 8.3 menunjukkan sebuah lingkaran satuan, titik $P(x_1, y_1)$ dan titik $Q(x_2, y_2)$ pada lingkaran. Misalkan $\angle XOQ = \alpha$ dan $\angle XOP = \beta$, maka $\angle POQ = \alpha - \beta$.

Perhatikan Δ OPP′:

$$\sin \beta = \frac{PP'}{OP} = \frac{y_1}{r} \Rightarrow y_1 = r \sin \beta$$

$$\cos \beta = \frac{OP'}{OP} = \frac{x_1}{r} \Rightarrow x_1 = r \cos \beta$$

Kita peroleh koordinat P dapat ditulis sebagai (r cos β, r sin β).

Perhatikan Δ OQQ′:

$$\sin \alpha = \frac{QQ'}{OQ} = \frac{y_2}{r} \Rightarrow y_2 = r \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{OQ'}{OQ} = \frac{x_2}{r} \Rightarrow x_2 = r \cos \alpha$$

Kita peroleh koordinat Q sebagai (r cos α, r sin α).

Bab 9 PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN TRIGONOMETRI

A. Persamaan Trigonometri Sederhana

Berikut ini beberapa contoh bentuk persamaan trigonometri:

a. $\sin x^\circ = \sin 60^\circ$ c. $\sin x^\circ = \frac{1}{2}$

b. $\cos x^\circ = \cos \dfrac{\pi}{6}$ d. $\tan x^\circ = \sqrt{3}$

Tiap persamaan di atas, memuat perbandingan trigonometri dengan variabel sudut x (dalam ukuran derajat dan radian).

1. Penyelesaian persamaan $\sin x^\circ = \sin \alpha^\circ$ $(x \in R)$

Untuk menyelesaikan persamaan trigonometri $\sin x^\circ = \sin \alpha^\circ$ $(x \in R)$ dapat ditentukan dengan menggunakan hubungan-hubungan yang berlaku pada perbandingan trigonometri sudut berelasi berikut.

a. $\sin (180^\circ - \alpha^\circ) = \sin \alpha^\circ$
b. $\sin (\alpha^\circ + k.360^\circ) = \sin \alpha^\circ$

Dengan menggunakan hubungan-hubungan di atas, maka penyelesaian persamaan trigonometri $\sin x^\circ = \sin \alpha^\circ$ dapat ditetapkan sebagai berikut.

> Jika $\sin x^\circ = \sin \alpha^\circ$ $(x \in R)$, maka:
>
> $x = \alpha + k.360^\circ$ atau $x = (180^\circ - \alpha) + k.360$, dengan $k \in B$
>
> *Catatan: x dalam derajat.*
>
> Jika $\sin x = \sin A$ $(x \in R)$, maka:
>
> $x = A + k.2\pi$ atau $x = (\pi - A) + k.2\pi$, dengan $k \in B$
>
> *Catatan: x dalam radian.*

Contoh 9.1:

Tentukan penyelesaian dari tiap persamaan trigonometri berikut ini:

a. $\sin x^o = \sin 25^o$ b. $\sin x^o = \sin 50^o$

Jawab:

a. $\sin x^o = \sin 25^o$, maka diperoleh:

$$x = 25^o + k.360^o \quad \text{atau} \quad x = (180^o - 25^o) + k.360^o$$
$$= 155^o + k.360^o$$

Jadi, $x = 25^o + k.360^o$ atau $x = 155^o + k.360^o$.

b. $\sin x^o = \sin 50^o$, maka diperoleh:

$$x = 50^o + k.360^o \quad \text{atau} \quad x = (180^o - 50^o) + k.360^o$$
$$= 130^o + k.360^o$$

Jadi, $x = 50^o + k.360^o$ atau $x = 130^o + k.360^o$.

Contoh 9.2:

Tentukan himpunan penyelesaian dari tiap persamaan trigonometri berikut ini.

a. $\sin 2x^o = \sin 40^o$, jika x dalam interval $0 \leq x \leq 360^o$

b. $\sin 3x^o = \sin 45^o$, jika x dalam interval $0 \leq x \leq 360^o$

Jawab:

a. $\sin 2x^o = \sin 40^o$, maka diperoleh:

$$2x = 40^o + k.360^o \quad \text{atau} \quad 2x = (180^o - 40^o) + k.360^o$$
$$\Leftrightarrow x = 20^o + k.180^o \qquad \Leftrightarrow 2x = 140^o + k.360^o$$
$$\Leftrightarrow x = 70^o + k.180^o$$

untuk $k = 0 \rightarrow x = 20^o$ atau untuk $k = 0 \rightarrow x = 70^o$

$k = 1 \rightarrow x = 200^o$ $k = 1 \rightarrow x = 250^o$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah HP = $\{20^o, 70^o, 200^o, 250^o\}$.

b. $\sin 3x^o = \sin 45^o$, maka diperoleh:

$$3x = 45^o + k.360^o \quad \text{atau} \quad 3x = (180^o - 45^o) + k.360^o$$
$$\Leftrightarrow x = 15^o + k.120^o \qquad \Leftrightarrow 3x = 135^o + k.360^o$$
$$\Leftrightarrow x = 45^o + k.120^o$$

untuk $k = 0 \rightarrow x = 15^o$ atau untuk $k = 0 \rightarrow x = 45^o$

$k = 1 \rightarrow x = 135^o$ $k = 1 \rightarrow x = 165^o$

$k = 2 \rightarrow x = 255^o$ $k = 2 \rightarrow x = 285^o$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah

HP = $\{15^o, 45^o, 135^o, 165^o, 255^o, 285^o\}$.

Bab 10 BENTUK a cos x° + b sin x°

A. Mengubah Bentuk a cos x° + b sin x° Menjadi Bentuk k cos (x – α)°, k cos (x + α)°, k sin (x – α)°, dan k sin (x + α)°

1. Mengubah bentuk a cos x° + b sin x° menjadi k cos (x – α)°

Bentuk $a \cos x^\circ + b \sin x^\circ$ dapat diubah menjadi bentuk $k \cos (x - \alpha)^\circ$ dengan k suatu skalar positif dan $0 \leq \alpha \leq 360$.

$a \cos x^\circ + b \sin x^\circ = k \cos (x - \alpha)^\circ$

$\Leftrightarrow$ $a \cos x^\circ + b \sin x^\circ = k (\cos x^\circ \cos \alpha^\circ + \sin x^\circ \sin \alpha^\circ)$

$\Leftrightarrow$ $a \cos x^\circ + b \sin x^\circ = k \cos x^\circ \cos \alpha^\circ + k \sin x^\circ \sin \alpha^\circ$

$\Leftrightarrow$ $a \cos x^\circ + b \sin x^\circ = k \cos \alpha^\circ \cos x^\circ + k \sin \alpha^\circ \sin x^\circ$

Dari persamaan di atas, koefisien $\cos x^\circ$ di ruas kiri harus sama dengan koefisien $\cos x^\circ$ di ruas kanan, demikian pula koefisien $\sin x^\circ$. Dengan demikian, kita dapatkan hubungan:

$k \cos \alpha^\circ = a$ .... (1)

$k \sin \alpha^\circ = b$ .... (2)

a. Menentukan nilai k

Jika persamaan (1) dan (2) dikuadratkan, diperoleh:

$k^2 \cos^2\alpha^\circ = a^2$

$k^2 \sin^2\alpha^\circ = b^2$

Selanjutnya, kita jumlahkan kedua persamaan, diperoleh:

$$\begin{array}{l} k^2 \cos^2\alpha^o = a^2 \\ k^2 \sin^2\alpha^o = b^2 \\ \hline k^2 \cos^2\alpha^o + k^2 \sin^2\alpha^o = a^2 + b^2 \end{array} +$$

$\Leftrightarrow$ $k^2 (\cos^2\alpha^o + \sin^2\alpha^o) = a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow$ $k^2 (1) = a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow$ $k^2 = a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow$ $k = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$, diambil $k > 0$

Jadi, $k = \sqrt{a^2 + b^2}$.

b. Menentukan besar sudut α^o

Jika persamaan (2) dibagi dengan persamaan (1), diperoleh:

$$\frac{k \sin \alpha^o}{k \cos \alpha^o} = \frac{b}{a}$$

$\Leftrightarrow$ $\frac{\sin \alpha^o}{\cos \alpha^o} = \frac{b}{a}$

$\Leftrightarrow$ $\tan \alpha^o = \frac{b}{a}$

2. Mengubah bentuk a cos x^o + b sin x^o menjadi k cos $(x + \alpha)^o$

Dengan cara yang sama, kita dapat mengubah bentuk $a \cos x^o + b \sin x^o$ ke dalam bentuk $k \cos (x + \alpha)^o$, dengan k suatu skalar positif dan $0 \leq \alpha \leq 360$.

$a \cos x^o + b \sin x^o = k \cos (x + \alpha)^o$

$\Leftrightarrow$ $a \cos x^o + b \sin x^o = k (\cos x^o \cos \alpha^o - \sin x^o \sin \alpha^o)$

$\Leftrightarrow$ $a \cos x^o + b \sin x^o = k \cos \alpha^o \cos x^o - k \sin \alpha^o \sin x^o$

Kita dapatkan hubungan:

$k \cos \alpha^o = a$ .... (3)

$k \sin \alpha^o = -b$ .... (4)

a. Menentukan nilai k

Jika persaman (3) dan (4) dikuadratkan, diper

$k^2 \cos^2\alpha^o = a^2$

$k^2 \sin^2\alpha^o = b^2$

Bab 11 LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

Sebelum membahas tentang limit fungsi trigonometri, terlebih dahulu kita harus mempelajari tentang pengertian limit fungsi dan limit fungsi aljabar.

A. Limit Fungsi Aljabar

Dalam kehidupan sehari-hari kita pernah mendengar kalimat-kalimat, misalnya *orang itu hampir saja terjatuh dari gedung, kendaraan itu sudah mendekati daerah yang dituju*. Kata-kata *hampir, mendekati,* dan sebagainya dapat dijelaskan dengan pengertian limit dalam matematika. Pengertian limit fungsi merupakan konsep dasar yang banyak digunakan dalam kalkulus, khususnya dalam hitung diferensial.

Pada suatu fungsi $y = f(x)$, keadaan dapat terlihat $f(x)$; jika x mendekati c, tetapi $x \neq c$. Sebagai ilustrasi, kita ambil fungsi $f(x) = x + 1$ dan $g(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$. Kita cari berapa nilai fungsi jika x mendekati 1.

Untuk itu, kita buat tabel nilai f(x) dan g(x) untuk jenis-jenis nilai x sebagai berikut.

Tabel 11.1

x	$f(x) = x + 1$	$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$
0,9	1,9	1,9
0,95	1,95	1,95
0,99	1,99	1,99
0,999	1,999	1,999
1,001	2,001	2,001
1,01	2,01	2,01
1,1	2,1	2,1

Dari tabel di atas, terlihat bahwa nilai f(x) mendekati 2 jika x mendekati 1 dan nilai g(x) mendekati 2 jika x mendekati 1. Pernyataan tersebut dapat diungkapkan menjadi *limit dari f(x) adalàh 2 jika x mendekati 1* dan *limit dari g(x) adalah 2 jika x mendekati 1.* Masing-masing pernvataan tersebut ditulis:

$$\boxed{\lim_{x \to 1} (x + 1) = 2 \text{ dan } \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = 2}$$

Dari dua contoh limit fungsi tersebut, secara umum dapat dinyatakan bahwa $\lim_{x \to a} f(x) = L$ jika x mendekati a, maka f (x) mendekati L.

Jika ditulis $\lim_{x \to a} f(x) = L$ maka mengandung arti bahwa x mendekati dari dua arah, yaitu x mendekati a dari kanan dan x mendekati a dari kiri. Selanjutnya, bentuk limit untuk $x \to \infty$ disebut *limit di tak berhingga*.

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} x = \infty \text{ dan } \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0}$$

Dari penjelasan tersebut, limit fungsi dapat didefinisikan sebagai berikut.

Limit suatu fungsi f(x) untuk x mendekati suatu bilangan a adalah nilai pendekatan fungsi f(x) bilamana x mendekati a. Misalkan $\lim_{x \to a} f(x) = L$, berarti bahwa nilai fungsi f(x) akan mendekati L, untuk x mendekati a.

DAFTAR PUSTAKA

Corlisss, J.J., Berglund, V.W. *Plane Trigonometri.* Boston: The Riverside Press Cambridge. 1958.

Gunawan, J. *100 Soal dan Pembahasan Trigonometri.* Jakarta: Grasindo. 1996.

Ilmu Komputer. 2006. *Penemu Konsep Algoritma [On-line] http://www.mail-archive.com/thebadkalong@yahoogroups.com/msg00037. html*

Larson and Hostetler. *Algebra and Trigonometry. Seventh Edition.* New York: Boston. 2007.

Muchlis, Farrah Diba, dan Mustikasari. *Peta Konsep Trigonometri SMA* dalam *Disain Matematika SMA* [On-line] http://pkab.wordpress.com/2008/08/01/. Diakses pada 20 Januari 2009. 2008.

Redaksi Kawan Pustaka. *Tabel Matematika.* Jakarta: Kawan Pustaka. 2004.

Republika (Selasa, 14 Oktober 2008). *Abul Wafa Muhammad Al-Buzjani, Peletak Dasar Rumus Trigonometri.* [On-line] http://www.republika.co.id/print/7847. Diakses pada 25 Januari 2009.

Simangunsong, W. *Soal dan Penyelesaian Matematika Dasar.* Bandung: Erlangga. 1997.

Wirodikromo, S. *Matematika SMA Kelas X.* Bandung: Erlangga. 2004.

TRIGONOMETRI DASAR
EDISI REVISI

Prof. Dr. Hj. Rahayu Kariadinata, M.Pd.

Trigonometri merupakan salah satu cabang matematika geometri yang membahas sudut segitiga dan fungsi trigonometrik, seperti sinus, kosinus, dan tangen. Aplikasi trigonometri, terutama pada bidang teknik digunakan dalam astronomi untuk menghitung jarak ke bintang-bintang terdekat, dalam geografi untuk menghitung antara titik tertentu, dan dalam sistem navigasi satelit. Selain itu, trigonometri juga digunakan dalam teori musik, akustik, optik, analisis pasar finansial, elektronik, teori probabilitas, statistika, biologi, farmasi, kimia, teori angka/kriptologi, seismologi, meteorologi, oseanografi, fisika, survei darat dan geogesi, ekonomi, teknik elektro, teknik mekanik, teknik sipil, grafik komputer, dan sebagainya.

Buku *Trigonometri Dasar* ini merupakan buku penunjang perkuliahan Trigonometri yang merupakan prasyarat bagi para mahasiswa dalam mengikuti perkuliahan lanjutan, seperti Kalkulus dan Kapita Selekta Matematika. Oleh karena itu, materi dan konsep Trigonometri dalam buku ini sangat penting untuk dipelajari dan dipahami agar mahasiswa, terutama calon guru matematika memiliki kemampuan untuk memahami konsep trigonometri, sekaligus menguasai strategi untuk menyampaikan konsep dan materi trigonometri bagi para siswanya, sehingga dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari.

Adapun materi trigonometri dasar yang dibahas dalam buku ini, antara lain materi ukuran sudut, perbandingan trigonometri, koordinat kutub (koordinat polar), identitas trigonometri, grafik fungsi trigonometri, dalil-dalil dalam segitiga, rumus perbandingan trigonometri, persamaan dan pertidaksamaan trigonometri, limit fungsi trigonometri, dan penerapan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari.

PENERBIT PUSTAKA SETIA
Jl. BKR (Lingkar Selatan) No. 162-164
Telp. (022) 5210588 | Fax. (022) 5224105
E-mail. pustaka_seti@yahoo.com
BANDUNG 40253
www.pustakasetia.com

9 789790 767300